

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

حسابان (یازدهم)

ویراست دوم

کاسم اجللی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



انتشارات
نشرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای حسابان ۱ سال یازدهم و با هدف کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در ابتدای هر درس، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای فصل گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف به‌ویژه کنکور سراسری نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست برخی پرسش‌های ویراست قبلی را حذف کرده‌ایم و البته تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های هر مبحث از درس را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. در دسته اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دسته دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری، بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های دسته اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در دسته سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های دسته دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این دسته از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعه هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «حسابان ۱ سه بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی، فهیمه گودرزی، هاله ایمانی و آقای آریس آقانیانس برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

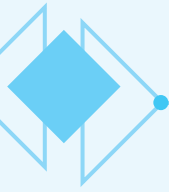
فهرست

◆ فصل اول: جبر و معادله

۲	درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲	درس دوم: معادلات درجه دوم
۲۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۲	درس سوم: معادلات گویا و گنگ
۳۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۴۳	درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۵۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۶۲	درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی
۶۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل دوم: تابع

۷۶	درس‌های اول و دوم: آشنایی بیشتر با تابع - انواع توابع
۸۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۰۶	درس سوم: وارون تابع
۱۱۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲۵	درس چهارم: اعمال روی توابع
۱۳۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



◆ فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

- درس اول: تابع نمایی ۱۴۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۵۲
- درس‌های دوم و سوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن - حل معادله‌های لگاریتمی ۱۵۹
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶۶

◆ فصل چهارم: مثلثات

- درس اول: رادیان ۱۸۴
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۸۸
- درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا ۱۹۴
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۰۰
- درس سوم: توابع مثلثاتی ۲۰۷
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۱۰
- درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ۲۱۵
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۲۰

◆ فصل پنجم: حد و پیوستگی

- درس‌های اول و دوم: مفهوم حد و فرایندهای حدی - حدهای یک طرفه ۲۳۴
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۳۸
- درس سوم: قضایای حد ۲۴۳
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۵۰
- درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$) ۲۵۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۶۳
- درس پنجم: پیوستگی ۲۷۹
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۸۵



◆ فصل ششم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۹۶	فصل اول
۳۴۷	فصل دوم
۳۹۴	فصل سوم
۴۱۶	فصل چهارم
۴۴۱	فصل پنجم

◆ فصل هفتم: پاسخنامه کلیدی

۴۷۵	پاسخنامه کلیدی
-----------	----------------

درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

رابطه‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها

نکته

اگر α و β دو زاویه دلخواه باشند، آن‌گاه

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin \alpha \cos \beta-\cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos \alpha \cos \beta+\sin \alpha \sin \beta$$

تست

کدام است؟ حاصل $\frac{\cos 2^\circ \cos 4^\circ - \sin 2^\circ \sin 4^\circ}{\sin 2^\circ \cos 4^\circ + \sin 4^\circ \cos 2^\circ}$

tan 2° (۴)

۱ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

$$\frac{\cos 2^\circ \cos 4^\circ - \sin 2^\circ \sin 4^\circ}{\sin 2^\circ \cos 4^\circ + \sin 4^\circ \cos 2^\circ} = \frac{\cos(2^\circ + 4^\circ)}{\sin(2^\circ + 4^\circ)} = \cot 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

از فرمول‌های مجموع و تفاضل زاویه‌ها نتیجه می‌شود

راه‌حل

تست

مقدار عددی $\sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x$ به ازای $x = \frac{\pi}{15}$ برابر است با

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

چون $\sin(\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta$ ، پس $\sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sin(3x+2x) = \sin 5x$ بنابراین مقدار

عددی عبارت مورد نظر به ازای $x = \frac{\pi}{15}$ برابر می‌شود با $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

راه‌حل

تست

اگر $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4}$ و a و b عددهایی طبیعی باشند، مقدار $|a-b|$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

ابتدا توجه کنید که $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4}$

بنابراین $a=6$ و $b=2$ یا $a=2$ و $b=6$. در هر صورت $|a-b|=4$.

راه‌حل

تست

اگر زاویه x حاده باشد و $\cos(60^\circ+x) + \cos(60^\circ-x) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{5}{3}$ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

توجه کنید که

راه‌حل

$$\cos(60^\circ+x) + \cos(60^\circ-x) = \cos 60^\circ \cos x - \sin 60^\circ \sin x + \cos 60^\circ \cos x + \sin 60^\circ \sin x = 2 \cos 60^\circ \cos x = \cos x$$

بنابراین $\cos x = \frac{3}{5}$. اکنون توجه کنید که

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{25}{9} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{9} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3} \quad (\tan x > 0 \text{ پس } x \text{ حاده است.})$$

تست ۵

 اگر $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$ و $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$ ، حاصل $\tan \alpha \cot \beta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) $\frac{1}{10}$

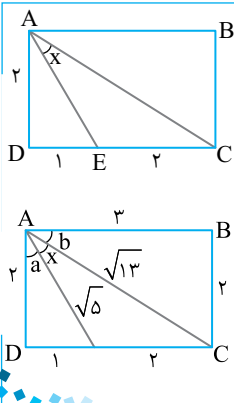
راه حل

 از تساوی‌های فرض مسئله نتیجه می‌شود $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$ و $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$. با جمع و تفریق این دو تساوی

$$\tan \alpha \cot \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{12}} = 5$$

معروف می‌شود $\sin \alpha \cos \beta = \frac{5}{12}$ و $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{12}$. در نتیجه

تست ۶

 در شکل مقابل چهارضلعی ABCD مستطیل است. مقدار $\cos x$ کدام است؟


- (۱) $\frac{4}{\sqrt{65}}$ (۲) $\frac{7}{\sqrt{65}}$
 (۳) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (۴) $\frac{7}{\sqrt{13}}$

راه حل

 ابتدا توجه کنید که با نامگذاری شکل مقابل، $x+a+b=90^\circ$ ، پس $x=90^\circ-(a+b)$. در نتیجه

$$\cos x = \cos(90^\circ - (a+b)) = \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

تکنه

 اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ ، $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$
تست ۷

 اگر $\sin x = \frac{4+3 \cos x}{3}$ ، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{4}-x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

راه حل

 از فرض سؤال نتیجه می‌شود $3 \sin x - 3 \cos x = 4 \Rightarrow \sin x - \cos x = \frac{4}{3}$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{4})) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos(\frac{3\pi}{4} - x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در نتیجه

تذکر

 عبارت $a \sin x + b \cos x$ را با فرض اینکه $\frac{b}{a} = \tan \theta$ و θ زاویه‌ای معلوم است، می‌توانیم به صورت $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$ بنویسیم.

 همچنین با فرض $\frac{a}{b} = \tan \alpha$ می‌توانیم آن را به صورت $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$ بنویسیم.

تست ۸

 حاصل عبارت $A = \sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ$ برابر است با

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{3}$

راه حل

توجه کنید که

$$A = 2(\frac{1}{2} \sin 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ) = 2(\cos 60^\circ \sin 15^\circ - \sin 60^\circ \cos 15^\circ) = 2 \sin(15^\circ - 60^\circ) = 2 \sin(-45^\circ) = -\sqrt{2}$$

تست

□□□□

حداقل و حداکثر عبارت $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ به ترتیب کدام است؟

(۴) $-\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$

(۳) -3 و 3

(۲) -2 و 2

(۱) -1 و 1

راه حل

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$. در نتیجه

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sin x + \tan \frac{\pi}{3} \cos x = \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + x)}{\frac{1}{2}} = 2 \sin(\frac{\pi}{3} + x)$$

از طرف دیگر، چون $-1 \leq \sin(\frac{\pi}{3} + x) \leq 1$ ، پس $-2 \leq 2 \sin(\frac{\pi}{3} + x) \leq 2$. بنابراین $-2 \leq \sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2$. بنابراین حداقل مقدار عبارتمورد نظر برابر -2 است (که مثلاً به ازای $x = \frac{7\pi}{6}$ به دست می‌آید) و حداکثر مقدار این عبارت برابر 2 است (که مثلاً به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ به دست می‌آید).نسبت‌های مثلثاتی 2α

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه

تست

□□□□

اگر $\sin x = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

(۴) $-\frac{7}{25}$

(۳) $\frac{7}{25}$

(۲) $-\frac{18}{25}$

(۱) $\frac{18}{25}$

راه حل

توجه کنید که

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$$

تست

□□□□

اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\sin x = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

(۴) $-\frac{4}{25}$

(۳) $-\frac{6}{25}$

(۲) $-\frac{12}{25}$

(۱) $-\frac{24}{25}$

راه حل

توجه کنید که چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، پس $\cos x < 0$ و در نتیجه

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

بنابراین، $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2(\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = -\frac{24}{25}$.

تست

□□□□

اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\cos 2x = \frac{7}{25}$ ، مقدار $\cos x$ کدام است؟

(۴) $-\frac{4}{5}$

(۳) $-\frac{3}{5}$

(۲) $-\frac{2}{5}$

(۱) $-\frac{1}{5}$

راه حل

توجه کنید که

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \frac{7}{25} = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x = 1 + \frac{7}{25} = \frac{32}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$$

چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، پس $\cos x < 0$ ، یعنی $\cos x = -\frac{4}{5}$.

تست ۱۳

اگر $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{26}{81}$ (۲) $-\frac{31}{81}$ (۳) $-\frac{41}{81}$ (۴) $-\frac{56}{81}$

راه حل

توجه کنید که $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{5}{9}$ ، $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(-\frac{5}{9}\right)^2 - 1 = -\frac{31}{81}$

تست ۱۴

مقدار $\cos 22/5^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

راه حل

چون $22/5^\circ$ نصف 45° است، پس در تساوی $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ قرار می‌دهیم $\alpha = 22/5^\circ$ و در نتیجه $\cos(2 \times 22/5^\circ) = 2\cos^2 22/5^\circ - 1 \Rightarrow \cos 45^\circ = 2\cos^2 22/5^\circ - 1$
 $2\cos^2 22/5^\circ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^2 22/5^\circ = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

تست ۱۵

اگر $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ ، مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

راه حل

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم و ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:
 $f(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$
 مقدار تابع به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ برابر با $\cos \frac{\pi}{6}$ ، یعنی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

تست ۱۶

حاصل عبارت $A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

راه حل

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم: $A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$
 اکنون به جای x مقدار $\frac{\pi}{24}$ را قرار می‌دهیم $A = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}$

تست ۱۷

مقدار عددی عبارت $B = \cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\cot 8^\circ}{8}$ (۲) $\frac{\cot 4^\circ}{4}$ (۳) $\frac{\tan 4^\circ}{4}$ (۴) $\frac{\tan 8^\circ}{8}$

راه حل

با ضرب و تقسیم کردن عبارت مورد نظر در $\sin 1^\circ$ ، از رابطه $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ به‌طور متوالی استفاده می‌کنیم:
 $B = \frac{(\sin 1^\circ \cos 1^\circ) \cos 2^\circ \cos 4^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{1}{2} \frac{(\sin 2^\circ \cos 2^\circ) \cos 4^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{1}{4} \frac{\sin 4^\circ \cos 4^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin 8^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin 8^\circ}{\cos 8^\circ} = \frac{\tan 8^\circ}{8}$

نکته

$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ ، $1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$

تست
۱۸اگر $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\sin 2x = -\frac{3}{16}$ ، مقدار $\sin x + \cos x$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{13}}{4}$

(۳) $-\frac{\sqrt{13}}{4}$

(۲) $-\frac{\sqrt{19}}{4}$

(۱) $\frac{\sqrt{19}}{4}$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

راه حل
توجه کنید کهاز طرف دیگر، چون $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ ، پس $\sin x + \cos x > 0$ ، در نتیجه $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

نکته

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

تست
۱۹اگر $\tan x - \cot x = 3$ ، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x \Rightarrow -3 = 2 \cot 2x \Rightarrow \cot 2x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x = -\frac{2}{3}$$

راه حل
توجه کنید که

نکته

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

تست
۲۰اگر $\tan x = 2$ ، مقدار $\sin 4x$ کدام است؟

(۴) $-\frac{12}{25}$

(۳) $\frac{12}{25}$

(۲) $-\frac{24}{25}$

(۱) $\frac{24}{25}$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{1 + 4} = \frac{4}{5}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

راه حل
توجه کنید که

نکته

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha, \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

تست
۲۱اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

(۴) $\frac{11}{27}$

(۳) $\frac{5}{9}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۱) $\frac{1}{3}$

ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{8}{9}$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27}$$
 بنابراین $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ اکنون دقت کنید که

راه حل

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\alpha \pm \beta$

۱۸۳- مقدار $\sin \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

۱۸۴- تابع $y = 4 \sin \lambda x$ (۱) $y = 4 \sin 2x$ (۲) $y = \sin 3x$ (۳) $y = \sin \lambda x$ (۴)

۱۸۵- حاصل عبارت $\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{6} + x)$ کدام است؟

(۱) $\sin x$ (۲) $-\sin x$ (۳) $1 - \cos x$ (۴) $\cos x - 1$

۱۸۶- ساده شده عبارت $A = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}$ کدام است؟

(۱) $\tan \alpha$ (۲) $\cot \alpha$ (۳) $\tan \beta$ (۴) $\cot \beta$

۱۸۷- حاصل $\frac{\sin(x+y) \sin(x-y)}{\cos^2 x - \cos^2 y}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) $-\frac{\cos^2 x}{\sin y}$ (۳) 1 (۴) $\frac{\sin 2x}{\sin y}$

۱۸۸- حاصل $\sin(x-y) \cos y + \cos(x-y) \sin y$ کدام است؟

(۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $\cos y$ (۴) $\sin y$

۱۸۹- اگر x حاده باشد و $\cot x = \frac{3}{4}$ ، مقدار $\cos(60^\circ - x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}(3 + \sqrt{3})$ (۲) $\frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})$ (۳) $\frac{1}{5}(3 - 2\sqrt{3})$ (۴) $\frac{1}{5}(3 + 2\sqrt{3})$

۱۹۰- حاصل عبارت $1 + \tan \alpha \tan 2\alpha$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$ (۳) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ (۴) $\frac{1}{\cos^2 2\alpha}$

۱۹۱- اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ، $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ ، $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ و $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin(\alpha - \beta)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{11\sqrt{5}}{25}$ (۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{25}$

۱۹۲- اگر $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$ و $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\sin \alpha \sin \beta$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

۱۹۳- اگر $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 3 \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

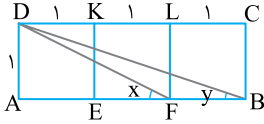
(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۹۴- حاصل $\frac{\sin(\pi-x)-\cos(\pi+x)}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۹۵- در شکل مقابل مقدار $\sin(x+y)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\alpha \pm \beta$

۱۹۶- اگر $\frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\tan a \tan b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{9}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

۱۹۷- اگر $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{5}$ و $\cos(\alpha-\beta) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\tan \alpha \tan \beta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۳

۱۹۸- اگر $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ، $0 < b < \frac{3\pi}{2}$ ، $\tan a = \frac{4}{3}$ و $\tan b = \frac{5}{12}$ ، مقدار $\cos(a+b)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{36}$ (۲) $-\frac{5}{27}$ (۳) $-\frac{16}{65}$ (۴) $-\frac{7}{65}$

۱۹۹- اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۲۰۰- اگر $A = \sin 40^\circ \cos 10^\circ - \cos 40^\circ \sin 10^\circ$ و $B = \cos 10^\circ \sin 40^\circ - \cos 40^\circ \sin 10^\circ$ ، مقدار $A+B$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

۲۰۱- اگر $a+b = \frac{2\pi}{3}$ ، مقدار $(\sin a + \cos b)^2 + (\cos a + \sin b)^2$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $2+\sqrt{2}$ (۳) $2+\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۲۰۲- اگر $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha) \cos(\frac{\pi}{4}-\alpha) = 1$ ، حاصل $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{32}$ (۲) $\frac{17}{16}$ (۳) $\frac{15}{32}$ (۴) $\frac{15}{16}$

۲۰۳- اگر $\sin 28^\circ + \cos 28^\circ = k^3$ ، مقدار $\cos 17^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k}{\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{k}{2}$ (۴) $\frac{k^3}{2}$

۲۰۴- مقدار $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۲۰۵- مقدار $\sin 37^\circ \cos 23^\circ + \cos 67^\circ \sin 53^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۰۶- مقدار $(\sin 1^\circ + \tan 2^\circ \cos 1^\circ) \sin 7^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

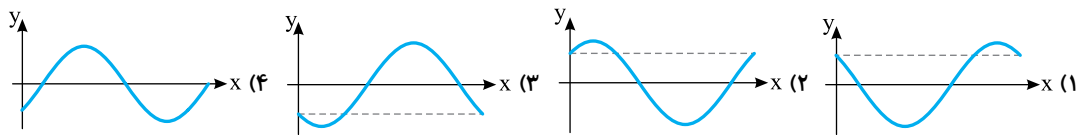
۲۰۷- مقدار $\frac{\cos 1^\circ + \sqrt{3} \sin 1^\circ}{\sin 4^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۲۰۸- اگر $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$ ، مقدار $\cos(x - \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۰۹- نمودار تابع $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$ کدام است؟



۲۱۰- اگر $\sin x + \sqrt{3} \cos x = a$ و $x \in (0, 2\pi)$ ، کدام درست است؟

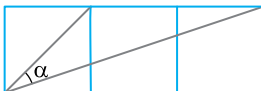
- (۱) $-2 < a < 2$ (۲) $-2 \leq a \leq 2, a \neq -\sqrt{3}$ (۳) $-2 < a < 2, a \neq -\sqrt{3}$ (۴) $-2 \leq a \leq 2$

۲۱۱- اگر α و β حاده باشند، $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ و $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\sin \beta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{25}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{7}{25}$ (۴) $\frac{1}{5}$

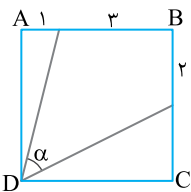
۲۱۲- مقدار $\frac{\sin 61^\circ \sin 31^\circ + \sin 59^\circ \sin 29^\circ}{\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$



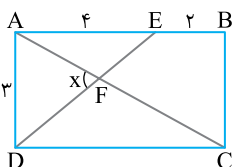
۲۱۳- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{15}}$



۲۱۴- در شکل مقابل ABCD مربع است. مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{85}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{85}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{85}}$ (۴) $\frac{6}{\sqrt{85}}$



۲۱۵- در شکل مقابل ABCD مستطیل است. مقدار $\cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

۲۱۶- در مثلث ABC، $\sin \hat{A} \sin \hat{B} = \cos \hat{A} \cos \hat{B}$ ، مقدار $\frac{\cos \hat{B}}{\sin \hat{A}} + \sin \hat{C}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۱۷- در مثلث ABC، اگر $\cos \hat{A} = \frac{2}{5}$ و $\cos \hat{B} = \frac{1}{3}$ ، مقدار $15 \cos \hat{C}$ کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2} - 3$ (۲) $8\sqrt{2} + 3$ (۳) $3 - 8\sqrt{2}$ (۴) $-3 - 8\sqrt{2}$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\alpha \pm \beta$

۲۱۸- اگر $\sin a + \cos b = \frac{2}{3}$ و $\cos a + \sin b = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، مقدار $\sin(a+b)$ کدام است؟

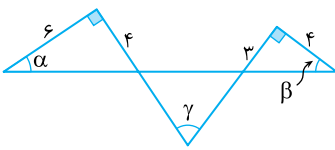
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۲۱۹- اگر $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ و $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$ ، حاصل $\cos(\alpha - \beta)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

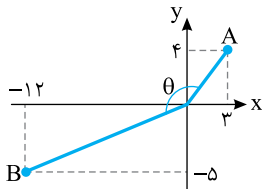
۲۲۰- اگر $\sin a = 4 \sin b \sin(a+b)$ و $\cos a = -4 \cos b \cos(a+b)$ ، مقدار $\tan a$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$



۲۲۱- در شکل مقابل مقدار $\sin \gamma$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{5\sqrt{52}}$ (۲) $\frac{18}{5\sqrt{52}}$
 (۳) $\frac{34}{5\sqrt{52}}$ (۴) $\frac{36}{5\sqrt{52}}$



۲۲۲- در شکل مقابل مقدار $\cos \theta$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{61}{65}$ (۲) $-\frac{56}{65}$
 (۳) $-\frac{31}{65}$ (۴) $-\frac{27}{65}$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α

۲۲۳- حاصل عبارت $\frac{2 \cos^2 x - \cos 2x}{2 \sin^2 x + \cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan x$ (۴) $\cot x$

۲۲۴- حاصل $\frac{\cos 2x}{1 - \tan^2 x}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cos^2 x$ (۲) $\sin^2 x$ (۳) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (۴) $\frac{1}{\sin^2 x}$

۲۲۵- مقدار $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۲۲۶- حاصل $\frac{1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\sin x$ (۲) $2 \sin x$ (۳) $\cos x$ (۴) $2 \cos x$

۲۲۷- حاصل $\tan 2\alpha \tan \alpha + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$ (۲) $\frac{2}{\cos 2\alpha}$ (۳) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$ (۴) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$

۲۲۸- حاصل $\frac{2 \sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2 \cos 10^\circ}$ (۲) $-\frac{1}{2 \cos 10^\circ}$ (۳) $2 \cos 10^\circ$ (۴) $-\frac{1}{\cos 10^\circ}$

- ۲۲۹- حاصل $\frac{1-\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ}$ برابر کدام است؟
- (۱) $\sin 2^\circ$ (۲) $\cos 2^\circ$ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 2^\circ$
- ۲۳۰- مقدار $\sin^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟
- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۲۳۱- مقدار $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8}$ کدام است؟
- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2
- ۲۳۲- مقدار $3 \cos^2 10.5^\circ + \sin^2 10.5^\circ$ کدام است؟
- (۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $\frac{4 - \sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{3} - 1$ (۴) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$
- ۲۳۳- اگر $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ۲۳۴- a زاویه‌ای حاده است و $\sin a = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin 2a + \cos 2a$ کدام است؟
- (۱) $\frac{32}{25}$ (۲) $\frac{31}{25}$ (۳) $\frac{27}{25}$ (۴) $\frac{26}{25}$
- ۲۳۵- اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)
- (۱) $\frac{29}{7}$ (۲) $\frac{24}{7}$ (۳) $\frac{23}{7}$ (۴) $\frac{18}{7}$
- ۲۳۶- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟
- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{6}$
- ۲۳۷- اگر $3 \sin x - 4 \cos x = 0$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{7}{25}$ (۲) $-\frac{4}{25}$ (۳) $-\frac{3}{25}$ (۴) $-\frac{2}{25}$
- ۲۳۸- حاصل $4 \cos^3 x \sin x - 4 \sin^3 x \cos x$ کدام است؟
- (۱) $\sin 2x$ (۲) $\cos 4x$ (۳) $2 \cos 2x$ (۴) $\sin 4x$
- ۲۳۹- اگر $\sin 4x = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$
- ۲۴۰- مقدار $\sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1)$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$
- ۲۴۱- مقدار عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۲۴۲- مقدار $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۴۳- مقدار $\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}+2}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-2}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$

۲۴۴- مقدار $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۴۵- مقدار $\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۴۶- حاصل عبارت $\frac{\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\cot(\pi+\alpha)-\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $\cos 2\alpha$ (۲) $\sin 2\alpha$ (۳) $-\sin 2\alpha$ (۴) $-\cos 2\alpha$

۲۴۷- مقدار $\cos \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$

۲۴۸- اگر $\sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}}{2}$ مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

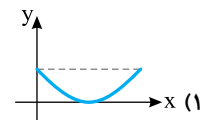
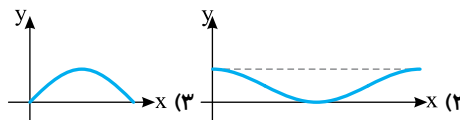
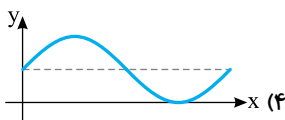
۲۴۹- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۵۰- اگر $x+y = \frac{\pi}{2}$ و $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}$ مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۲۵۱- قسمتی از نمودار تابع $y = \cos^2(\frac{x}{2})$ کدام است؟



نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α

۲۵۲- حاصل عبارت $\frac{2 \tan x - \sin 2x}{1 - \cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) $-\tan x$ (۲) $\sin x$ (۳) $\tan x$ (۴) $-\sin x$

۲۵۳- حاصل عبارت $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \tan \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\cos \alpha$ (۲) $\cos^2 \alpha$ (۳) $2 \cos \alpha$ (۴) $2 \cos^2 \alpha$

- ۲۵۴- حاصل عبارت $\frac{\sin x - \sin 2x}{1 - \cos x + \cos 2x}$ کدام است؟
- (۱) $\tan x$ (۲) $\sin x$ (۳) $-\tan x$ (۴) $-\sin x$
- ۲۵۵- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x + \cos 2x} = \frac{4}{3}$ مقدار $\tan x$ کدام است؟
- (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -2 (۴) $-\frac{1}{4}$
- ۲۵۶- اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{5}{12}$ مقدار $\cos x$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{5}{6}$ (۲) $-\frac{5}{13}$ (۳) $-\frac{11}{12}$ (۴) $-\frac{12}{13}$
- ۲۵۷- اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ مقدار عبارت $\tan \alpha \sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟
- (۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۲) $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ (۳) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ۲۵۸- اگر $0 \leq x \leq \pi$ و $2 \cos(\pi - x) = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$ مقدار $\cos x$ کدام است؟
- (۱) -1 (۲) 1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر
- ۲۵۹- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ و $\sin 2x - \sqrt{2} \cos x = 0$ مقدار $\tan x$ کدام است؟
- (۱) -1 (۲) 1 (۳) -2 (۴) $\sqrt{2}$
- ۲۶۰- ساده شده عبارت $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \sin(x - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{2} \sin 2x$ (۲) $\frac{1}{2} \sin 2x$ (۳) $-\frac{1}{2} \cos 2x$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2x$
- ۲۶۱- حاصل کسر $\frac{\sin(x+y) \cos(x-y) - \cos(x+y) \sin(x-y)}{\cos^2 y - \sin^2 y}$ کدام است؟
- (۱) 1 (۲) $\tan 2y$ (۳) $\cot 2y$ (۴) $-\cot 2x$
- ۲۶۲- اگر $\cos 3^\circ = a$ مقدار $\sin 84^\circ$ بر حسب a کدام است؟
- (۱) $\frac{1-a^2}{2}$ (۲) $\frac{a^2-1}{2}$ (۳) $2a^2-1$ (۴) $1-2a^2$
- ۲۶۳- اگر $\sin^2 5^\circ - \sin^2 4^\circ = a$ مقدار $\cos 2^\circ$ بر حسب a کدام است؟
- (۱) $1-a^2$ (۲) $1-2a^2$ (۳) $1-\frac{a^2}{2}$ (۴) $\frac{1-a^2}{2}$
- ۲۶۴- اگر $\sin 65^\circ = a$ حاصل $\sin 4^\circ$ بر حسب a کدام است؟
- (۱) $1-2a^2$ (۲) $2a^2-1$ (۳) $2a$ (۴) $\sqrt{1-a^2}$
- ۲۶۵- اگر $\sin 12^\circ = x$ مقدار $\cos 66^\circ$ بر حسب x کدام است؟
- (۱) $2x^2-1$ (۲) $x\sqrt{1-x^2}$ (۳) $2x\sqrt{1-x^2}$ (۴) $2x\sqrt{1+x^2}$
- ۲۶۶- مقدار $\frac{\sin^2 11^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ}$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) 1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 2
- ۲۶۷- اگر $\tan \alpha = x$ حاصل $\frac{2(1+\sin^2 \alpha)}{1+\cos 2\alpha}$ بر حسب x کدام است؟
- (۱) $1+2x$ (۲) $1+2x^2$ (۳) $2x-3$ (۴) $1+x^2$

۲۶۸- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۲۶۹- اگر $\sin kx (\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \sin kx$ ، مقدار k کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲

۲۷۰- مقدار $\frac{\cos 8^\circ}{\cos 4^\circ - \sin 4^\circ} - \sin 4^\circ$ برابر کدام است؟

(۱) $\sin 4^\circ$ (۲) $\cos 4^\circ$ (۳) $-\cos 4^\circ$ (۴) $-\sin 4^\circ$

۲۷۱- حاصل $\frac{1 + \cos 4^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$ کدام است؟

(۱) $2 \cos 2^\circ$ (۲) $4 \cos 2^\circ$ (۳) $\frac{\cos 2^\circ}{2}$ (۴) $\frac{\cos 2^\circ}{4}$

۲۷۲- اگر $\sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \sin^2(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{3}{11}$ (۳) $\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{7}{11}$

۲۷۳- اگر $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ و $\tan x = -\frac{4}{3}$ ، مقدار $\sin \frac{x}{2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

۲۷۴- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ ، مقدار $\cot x$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۷۵- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = 2 \sin x - \cos x - \frac{1}{2}$ ، حاصل $\sin x$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۲۷۶- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، عبارت $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos x}}$ برابر کدام است؟

(۱) $2 \sin \frac{x}{4}$ (۲) $2 \cos \frac{x}{4}$ (۳) $\sin \frac{x}{2}$ (۴) $\cos \frac{x}{2}$

۲۷۷- اگر $\frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $-\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{7}{9}$

۲۷۸- اگر $9 \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 6$ ، مقدار $\cos 2\theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $-\frac{7}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۷۹- اگر $\cos 2x = 3 \sin^4 x$ ، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۸۰- مقدار $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۲۸۱- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۲۸۲- مقدار $\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۸۳- اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\cos^2 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{60}$ (۲) $\frac{59}{60}$ (۳) $\frac{13}{15}$ (۴) $\frac{11}{15}$

۲۸۴- مقدار $\frac{\sin 5^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۲۸۵- اگر $x = \frac{\pi}{24}$ ، مقدار $\cos 10x \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۸۶- اگر $a = \frac{\pi}{12}$ ، مقدار $\sin a \cos a \cos 2a \cos 4a$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{16}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{16}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

۲۸۷- اگر $\frac{3}{\cos x} = 16 \sin x \cos 2x$ ، مقدار $\sin 4x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۸۸- اگر $\cos x = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{53}{81}$ (۲) $-\frac{67}{81}$ (۳) $-\frac{73}{81}$ (۴) $-\frac{79}{81}$

۲۸۹- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و $\sin x = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 3x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\sqrt{5}}{27}$ (۲) $-\frac{5\sqrt{5}}{27}$ (۳) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$ (۴) $-\frac{7\sqrt{5}}{27}$

۲۹۰- اگر $\sin 78^\circ = k$ ، مقدار $\cos 48^\circ$ برحسب k کدام است؟

- (۱) $8 - 8k^2$ (۲) $8k - 8k^2$ (۳) $16k - 16k^2$ (۴) $8k^4 - 8k^2 + 1$

۲۹۱- حاصل عبارت $A = (\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8})(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} - 1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۹۲- اگر $\tan 2x + \cot 2x = 8$ ، مقدار $\sin 4x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۹۳- حاصل عبارت $\frac{4 \cos 2\alpha}{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\sin 2\alpha$ (۲) $\sin^2 2\alpha$ (۳) $-\sin 2\alpha$ (۴) $-\sin^2 2\alpha$

۲۹۴- حاصل عبارت $\frac{2+2 \cos 4\alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\cos 2\alpha$ (۲) $\sin 2\alpha$ (۳) $\cos 4\alpha$ (۴) $\sin 4\alpha$

۲۹۵- اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ و $\sin x = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{3}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۲۹۶- مقدار $\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\tan 1^\circ$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\cot 1^\circ$

۲۹۷- اگر $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ، مقدار $|\tan 2x|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۲۹۸- اگر $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{24}$ (۲) $\frac{25}{24}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۹۹- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ، مقدار $\cot 2x - \tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3\sqrt{7}}$ (۲) $-\frac{3}{2\sqrt{7}}$ (۳) $\frac{3}{4\sqrt{7}}$ (۴) $-\frac{2}{3\sqrt{7}}$

۳۰۰- عبارت $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sin 2\alpha} + \tan 2\alpha$ (۲) $\frac{1}{\cos 2\alpha} + \tan 2\alpha$ (۳) $\frac{1}{\cos 2\alpha} - \tan 2\alpha$ (۴) $\frac{1}{\sin 2\alpha} - \tan 2\alpha$

۳۰۱- حاصل $\frac{1 + \sin 2^\circ}{\sin 55^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan 35^\circ$ (۲) $\cot 35^\circ$ (۳) $2 \sin 35^\circ$ (۴) $2 \cos 35^\circ$

۳۰۲- حاصل $1 + \frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \sin 1^\circ} - 1$ چند برابر $\cos 8^\circ$ است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۳۰۳- ساده شده عبارت $\frac{\sin \Delta x}{\sin x} - \frac{\cos \Delta x}{\cos x}$ کدام است؟

- (۱) $4 \sin 2x$ (۲) $2 \cos 2x$ (۳) $2 \sin 2x$ (۴) $4 \cos 2x$

۳۰۴- اگر $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1$ ، مقدار $\sin^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۳۰۵- مقدار $\frac{\sin 9^\circ}{\sin 3^\circ} + \frac{\cos 9^\circ}{\cos 3^\circ}$ چند برابر $\cos 6^\circ$ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۰۶ - مقدار $\frac{\sin ۳۳^\circ}{\sin ۱۱^\circ} - \frac{\cos ۳۳^\circ}{\cos ۱۱^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $۲ \cos ۲۲^\circ$ (۲) $۴ \cos ۲۲^\circ$ (۳) $۲ \sin ۲۲^\circ$ (۴) $۴ \sin ۲۲^\circ$

۳۰۷ - اگر $\sin ۸۲^\circ = a$ ، مقدار عبارت $\frac{\cos ۱۲^\circ + \sin ۱۲^\circ}{\cos ۴^\circ \sin ۴^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}a$ (۲) $\frac{a}{۲}$ (۳) $۲a$ (۴) $۴a$

۳۰۸ - اگر $\frac{\cos ۳\alpha}{\cos \alpha} = \frac{۱}{۳}$ ، مقدار $\frac{\sin ۳\alpha}{\sin \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲) $\frac{۴}{۳}$ (۳) $\frac{۵}{۳}$ (۴) $\frac{۷}{۳}$

۳۰۹ - اگر $\frac{\pi}{۳} < x < \frac{\pi}{۲}$ و $\sin x \cos x = \frac{m}{۴}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $۱ < m < ۲$ (۲) $۱ < m < \sqrt{۳}$ (۳) $۱ < m \leq ۲$ (۴) $\sqrt{۳} < m \leq ۲$

۳۱۰ - برد تابع $f(x) = \sin^7 x - \sin^2 x$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{۱}{۴}, ۰]$ (۲) $[-\frac{۱}{۲}, ۰]$ (۳) $[-\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}]$ (۴) $[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲α

۳۱۱ - حاصل $\frac{۲ \cos^2(۴۵^\circ + x) + \sin ۲x}{۲ \cos^2(۴۵^\circ - x) - \sin ۲x}$ کدام است؟

- (۱) $\cos ۲x$ (۲) $\sin ۲x$ (۳) $\tan ۲x$ (۴) ۱

۳۱۲ - اگر $\frac{\cos ۳x}{\sin ۶x + \cos ۳x} = \frac{۳}{۵}$ ، مقدار $\frac{۱}{\sin ۳x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۱۳ - مقدار $(\sin ۱۶۵^\circ - \sin ۷۵^\circ)^8$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۸}$ (۲) $\frac{۱}{۱۲۸}$ (۳) $\frac{۱}{۶۴}$ (۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۳۱۴ - اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{\cos ۲x}{۱ + \sin ۲x} = \frac{۱}{۳}$ ، مقدار $\sin x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ (۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ (۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۳۱۵ - اگر $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$ و $۱ + \sin \alpha + \cos \alpha + \sin ۲\alpha = \cos ۲\alpha$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\sin \alpha = -\frac{۱}{۲}$ (۲) $\sin \alpha = \frac{۱}{۳}$ (۳) $\tan \alpha = -۱$ (۴) $\tan \alpha = -۲$

۳۱۶ - اگر $(\sin \alpha + \cos \alpha)(۱ - \sin ۲\alpha) = \cos ۲\alpha$ ، کدام گزینه درست است؟ ($\sin ۲\alpha \neq ۰$)

- (۱) $\tan \alpha = \pm ۲$ (۲) $\tan \alpha = \pm \frac{۱}{۲}$ (۳) $\tan \alpha = \pm ۱$ (۴) $\tan \alpha = ۰$

۳۱۷ - ساده شده عبارت $A = \sqrt{۱ - \sin ۱^\circ} + \sqrt{۱ + \sin ۱^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $۲ \sin ۵^\circ$ (۲) $۲ \cos ۵^\circ$ (۳) $\sin ۱۰^\circ$ (۴) $\cos ۱۰^\circ$

۳۱۸- حاصل $\frac{1+\cos 1^\circ + \cos 2^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan 1^\circ$ (۲) $\cot 1^\circ$ (۳) $\sin 1^\circ$ (۴) $\cos 1^\circ$

۳۱۹- ساده شده عبارت $\frac{1+\sin 2^\circ - \cos 2^\circ}{1+\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan 1^\circ$ (۲) $\cot 1^\circ$ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 2^\circ$

۳۲۰- اگر $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{a}{2}$ مقدار a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\sqrt{2}+2$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

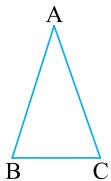
۳۲۱- مقدار $\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

۳۲۲- برد تابع $f(x) = \sin^x x + \cos^x x$ کدام است؟

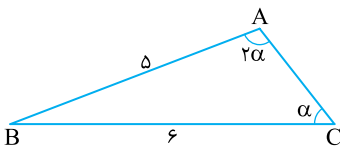
- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[\frac{1}{2}, 1]$

۳۲۳- در شکل مقابل مثلث ABC حاده است، $AB=AC$ و $\sin \hat{A} = \frac{3}{5}$ مقدار $\sin \hat{B}$ کدام است؟



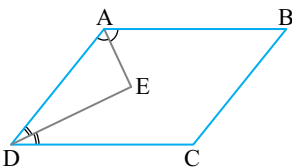
- (۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ (۴) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

۳۲۴- در شکل مقابل مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{8}{25}$ (۲) $\frac{12}{25}$ (۳) $\frac{16}{25}$ (۴) $\frac{24}{25}$

۳۲۵- در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است و نیمساز زاویه های A و D یکدیگر را در نقطه E قطع کرده اند. اگر $\tan \hat{ADE} = \frac{3}{4}$ مقدار $\sin \hat{C}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{9}{25}$ (۲) $\frac{12}{25}$ (۳) $\frac{18}{25}$ (۴) $\frac{24}{25}$

۳۲۶- اگر $2 \sin x = 1 + \cos x$ و $\sin x \neq 0$ مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{24}{7}$ (۲) $-\frac{12}{7}$ (۳) $\frac{24}{7}$ (۴) $\frac{12}{7}$

۳۲۷- مقدار $\frac{\cos 1^\circ}{\sin 2^\circ \sin 7^\circ \sin 5^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۲۸- بیشترین مقدار عبارت $\frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \tan^2 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۲۹- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$ مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

تجربی - ۹۳

 -۳۳۰ اگر $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{9}$ (۲) $-\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{2}{9}$

تجربی - ۹۵

 -۳۳۱ اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

تجربی - ۹۶

 -۳۳۲ اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

 -۳۳۳ اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

ریاضی - ۹۶

 -۳۳۴ حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

تجربی - ۹۷

 -۳۳۵ اگر $\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 2$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۳

تجربی خارج از کشور - ۹۷

 -۳۳۶ از رابطه $\sin \Delta x \cos 3x - \cos \Delta x \sin 3x = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{4}{9}$

ریاضی - ۹۹

 -۳۳۷ اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۹

 -۳۳۸ اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی باشد و $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ ، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

توجه کنید که ۱۹۰ ۲

$$1 + \tan \alpha \tan 2\alpha = 1 + \frac{\sin \alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos(2\alpha - \alpha)}{\cos \alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

ابتدا مقدار $\cos \alpha$ و $\sin \beta$ را حساب می‌کنیم: ۱۹۱ ۱

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{\delta} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{\delta - 1}{\delta}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi}{\delta} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{\delta - 1}}{\delta}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{16}{25}$$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi}{\delta} \rightarrow \sin \beta = -\frac{4}{\delta}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ &= \frac{\sqrt{\delta - 1}}{\delta} \times \frac{3}{\delta} - \left(-\frac{4}{\delta}\right) \left(-\frac{\sqrt{\delta - 1}}{\delta}\right) = \frac{-\delta\sqrt{\delta - 1}}{\delta^2} = \frac{-\sqrt{\delta - 1}}{\delta} \end{aligned}$$

توجه کنید که ۱۹۲ ۱

$$\frac{1}{3} = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{1}{4} = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

اگر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = 2 \sin \alpha \cos \beta \Rightarrow \sin \alpha \cos \beta = -\frac{1}{24}$$

توجه کنید که ۱۹۳ ۳

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

در نتیجه فرض مسئله به تساوی $\sin x + \cos x = 3(\cos x - \sin x)$ تبدیل می‌شود. بنابراین $4 \sin x = 2 \cos x$ و $\tan x = \frac{1}{2}$.

توجه کنید که ۱۹۴ ۱

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{و} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

همچنین $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است

$$\frac{\sin x - (-\cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)} = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)} = \sqrt{2}$$

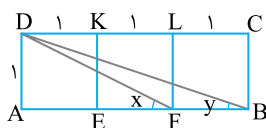
توجه به شکل، از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود ۱۹۵ ۳

$$DF = \sqrt{AF^2 + AD^2} = \sqrt{5}, \quad DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{10}$$

بنابراین $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ و $\cos y = \frac{3}{\sqrt{10}}$. در نتیجه

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



توجه کنید که ۱۹۶ ۲

$$\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{4}{\delta} \Rightarrow \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{4}{\delta}$$

توجه کنید که ۱۸۳ ۴ $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

با استفاده از دستور سینوس تفاضل دو زاویه معلوم می‌شود ۱۸۴ ۲

$$f \sin \delta x \cos 3x - f \cos \delta x \sin 3x = f \sin(\delta x - 3x) = f \sin 2x$$

ابتدا توجه کنید که ۱۸۵ ۱

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \\ &\quad - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x = \sin x \end{aligned}$$

صورت کسر A به شکل زیر ساده می‌شود: ۱۸۶ ۳

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= 2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

مخرج کسر A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$A = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \tan \beta$$

بنابراین $A = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \tan \beta$

توجه کنید که ۱۸۷ ۱

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sin(x + y) \sin(x - y) &= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y \\ &= (1 - \cos^2 x) \cos^2 y - \cos^2 x (1 - \cos^2 y) \\ &= \cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y \\ &= \cos^2 y - \cos^2 x \end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با -۱ است.

از دستور سینوس مجموع دو زاویه معلوم می‌شود که عبارت مورد نظر ۱۸۸ ۱

$$\sin(x - y + y) = \sin x$$

برابر است با $\sin(x - y + y) = \sin x$

ابتدا توجه کنید که ۱۸۹ ۴

$$\cos(60^\circ - x) = \cos 60^\circ \cos x + \sin 60^\circ \sin x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

از طرف دیگر،

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{16}{25} \quad \text{از آنجا که } \sin x > 0$$

$$\sin x = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$$

$$\cos(60^\circ - x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$$

به این ترتیب،

توجه کنید که ۳ ۲۰۱

$$\begin{aligned} & (\sin a + \cos b)^2 + (\cos a + \sin b)^2 \\ &= \sin^2 a + \cos^2 b + 2 \sin a \cos b + \cos^2 a + \sin^2 b + 2 \cos a \sin b \\ &= (\sin^2 a + \cos^2 a) + (\cos^2 b + \sin^2 b) + 2(\sin a \cos b + \cos a \sin b) \\ &= 1 + 1 + 2 \sin(a+b) = 2 + 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

توجه کنید که ۱ ۲۰۲

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

در نتیجه $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$. از طرف دیگر، $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. در نتیجه

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{8} \text{ و } \cos^2 \alpha = \frac{5}{8} \text{ بنابراین}$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{9+25}{64} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

می‌توان نوشت ۲ ۲۰۳

$$\begin{aligned} \cos 17^\circ &= \cos(45^\circ - 28^\circ) = \cos 45^\circ \cos 28^\circ + \sin 45^\circ \sin 28^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 28^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 28^\circ = \frac{\cos 28^\circ + \sin 28^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

توجه کنید که ۱ ۲۰۴

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ + \cos 15^\circ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 15^\circ \right) \\ &= \sqrt{2} (\sin 15^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 15^\circ) \\ &= \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 60^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

ابتدا توجه کنید که ۴ ۲۰۵

$$\cos 67^\circ = \cos(90^\circ - 23^\circ) = \sin 23^\circ, \quad \sin 53^\circ = \sin(90^\circ - 37^\circ) = \cos 37^\circ$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sin 37^\circ \cos 23^\circ + \cos 67^\circ \sin 53^\circ &= \sin 37^\circ \cos 23^\circ + \sin 23^\circ \cos 37^\circ \\ &= \sin(37^\circ + 23^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

راه‌حل اول توجه کنید که ۱ ۲۰۶

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ + \tan 2^\circ \cos 1^\circ &= \sin 1^\circ + \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \cos 1^\circ \\ &= \frac{\sin 1^\circ \cos 2^\circ + \sin 2^\circ \cos 1^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{\sin(1^\circ + 2^\circ)}{\cos 2^\circ} \\ &= \frac{\sin 3^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{1}{2 \cos 2^\circ} \end{aligned}$$

از طرف دیگر، $\sin 7^\circ = \sin(9^\circ - 2^\circ) = \cos 2^\circ$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر

$$\left(\frac{1}{2 \cos 2^\circ}\right) \cos 2^\circ = \frac{1}{2} \text{ است با } \frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\tan 2^\circ = \tan(9^\circ - 7^\circ) = \cot 7^\circ = \frac{\cos 7^\circ}{\sin 7^\circ}$$

اگر صورت و مخرج کسر سمت چپ تساوی بالا را بر $\cos a \cos b$ تقسیم کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{1 + \tan a \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5 + 5 \tan a \tan b = 4 - 4 \tan a \tan b$$

$$\tan a \tan b = -\frac{1}{9}$$

توجه کنید که ۳ ۱۹۷

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}, \quad \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}$$

با جمع و تفریق این دو تساوی معلوم می‌شود که $\cos \alpha \cos \beta = \frac{2}{5}$ و

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}$$

$$\tan \alpha \times \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

توجه کنید که ۳ ۱۹۸

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos a \cos b \left(1 - \frac{\sin a}{\cos a} \times \frac{\sin b}{\cos b}\right) \\ &= \cos a \cos b (1 - \tan a \tan b) \end{aligned}$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \text{ از طرف دیگر،}$$

چون $0 < a < \frac{\pi}{4}$ پس $\cos a > 0$ ، یعنی $\cos a = \frac{3}{5}$. همین‌طور

$$\cos^2 b = \frac{1}{1 + \tan^2 b} = \frac{1}{1 + \frac{25}{144}} = \frac{144}{169} = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

چون $\frac{\pi}{2} < b < \pi$ پس $\cos b < 0$ ، یعنی $\cos b = -\frac{12}{13}$. بنابراین،

$$\cos(a+b) = \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{5}{12}\right)\right) = \frac{-16}{65}$$

توجه کنید که ۱ ۱۹۹

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha (1 - \tan \alpha) \end{aligned}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} \text{ از طرف دیگر،}$$

چون $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ پس $\cos \alpha > 0$ ، یعنی $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. به این ترتیب،

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

با توجه به این که $\cos 1^\circ = \sin 8^\circ$ می‌توان نوشت ۳ ۲۰۰

$$\begin{aligned} A+B &= \sin 4^\circ \cos 1^\circ - \cos 8^\circ \cos 4^\circ + \sin 8^\circ \sin 4^\circ - \cos 4^\circ \sin 1^\circ \\ &= (\sin 4^\circ \cos 1^\circ - \cos 4^\circ \sin 1^\circ) + (\sin 8^\circ \sin 4^\circ - \cos 8^\circ \cos 4^\circ) \\ &= \sin(4^\circ - 1^\circ) - \cos(8^\circ + 4^\circ) = \sin 3^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر می‌شود

$$\begin{aligned} & (\sin 1^\circ + \tan 2^\circ \cos 1^\circ) \sin 7^\circ \\ &= (\sin 1^\circ + \frac{\cos 7^\circ}{\sin 7^\circ} \cos 1^\circ) \sin 7^\circ \\ &= \sin 1^\circ \sin 7^\circ + \cos 7^\circ \cos 1^\circ = \cos(7^\circ - 1^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \cos 1^\circ + \sqrt{3} \sin 1^\circ &= \cos 1^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin 1^\circ \\ &= \frac{\cos 60^\circ \cos 1^\circ + \sin 60^\circ \sin 1^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\cos(60^\circ - 1^\circ)}{\frac{1}{2}} = 2 \cos 59^\circ \end{aligned}$$

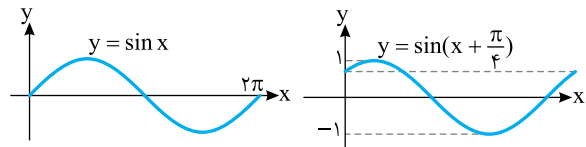
از طرف دیگر، چون $5^\circ + 4^\circ = 9^\circ$ ، پس $\cos 5^\circ = \sin 4^\circ$ و در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $2 \frac{\sin 4^\circ}{\sin 4^\circ} = 2$.

دو طرف تساوی داده شده را بر $2\sqrt{3}$ تقسیم می‌کنیم

$$\begin{aligned} 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x &= 3 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{3}} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \sin x = \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x - \frac{\pi}{6}) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

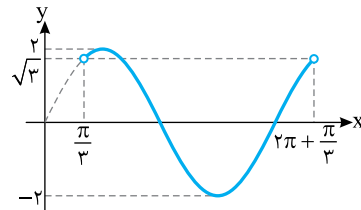
ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به صورت $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ است.

بنابراین کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم کنیم و آن را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ به چپ انتقال دهیم.



توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \\ \text{بنابراین } a &= 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}). \text{ از } x \in (0, 2\pi) \text{ نتیجه می‌شود } x + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}). \\ \text{در شکل زیر نمودار تابع } y &= 2 \sin x \text{ در بازهٔ فوق پررنگ شده است. در نتیجه } -2 \leq a \leq 2. \end{aligned}$$



چون $\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ حاده هستند، پس $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ بنابراین

$$\begin{aligned} \text{در نتیجه } 0 < \alpha + \beta < \pi \\ \sin(\alpha + \beta) > 0. \text{ اکنون توجه کنید که} \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5}, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin((\alpha + \beta) - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

ابتدا توجه کنید که

$$61^\circ + 29^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 29^\circ = \cos 61^\circ$$

$$31^\circ + 59^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 59^\circ = \cos 31^\circ$$

بنابراین صورت کسر مورد نظر برابر است با

$$\sin 61^\circ \sin 31^\circ + \cos 61^\circ \cos 31^\circ = \cos(61^\circ - 31^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

از طرف دیگر، مخرج کسر مورد نظر برابر است با

$$\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ = \sin(12^\circ + 18^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

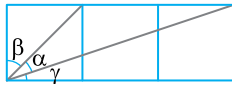
$$\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین، کسر مورد نظر برابر است با $\frac{1}{2} \sqrt{3}$.

با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. بنابراین $\alpha = 90^\circ - (\beta + \gamma)$

و در نتیجه

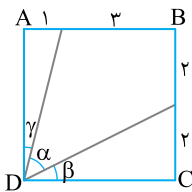
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(90^\circ - (\beta + \gamma)) = \cos(\beta + \gamma) \\ &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$



با نمادگذاری شکل زیر $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. بنابراین $\alpha = 90^\circ - (\beta + \gamma)$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(90^\circ - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma \\ &= \frac{2}{\sqrt{20}} \times \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{20}} \times \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{12}{\sqrt{20} \sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{85}} \end{aligned}$$



توجه کنید که با نمادگذاری شکل زیر، $x = a + b$. در نتیجه

$$\cos x = \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

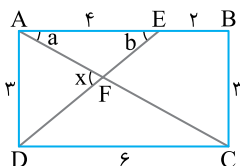
از طرف دیگر، $AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ و $DE = \sqrt{25} = 5$. پس

$$\triangle ABC: \cos a = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin a = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle ADE: \cos b = \frac{AE}{DE} = \frac{4}{5}, \quad \sin b = \frac{AD}{DE} = \frac{1}{5}$$

$$\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{5\sqrt{5}} = \frac{7}{5\sqrt{5}}$$

بنابراین

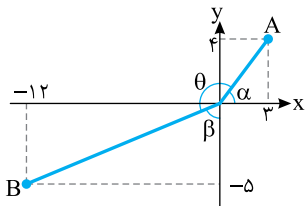


۲۲۲ با توجه به شکل زیر معلوم می‌شود که $\theta + \alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi$. در نتیجه

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{2\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = -\sin(\alpha + \beta) \quad \text{بنابراین } \theta = \frac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta)$$

از طرف دیگر، $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ، $\sin \beta = \frac{12}{13}$ ، $\cos \beta = \frac{5}{13}$

بنابراین $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{56}{65}$
در نتیجه $\cos \theta = -\frac{56}{65}$



۲۲۳ توجه کنید که $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ بنابراین

$$\frac{2 \cos^2 x - \cos 2x}{2 \sin^2 x + \cos 2x} = \frac{2 \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1)}{2 \sin^2 x + (1 - 2 \sin^2 x)} = \frac{1}{1} = 1$$

۲۲۴ توجه کنید که $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ بنابراین

$$\frac{\cos 2x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

۲۲۵ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos 2x$$

بنابراین $\frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{4}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۲۶ توجه کنید که $(\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha)$

$$\frac{1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x} = \frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x$$

۲۲۷ توجه کنید که $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ بنابراین

$$\tan 2\alpha \tan \alpha + 1 = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} + 1 = \frac{2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

۲۲۸ توجه کنید که $1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ بنابراین

$$\frac{2 \sin^2 40^\circ - 1}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{-\cos 80^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 10^\circ)}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{2 \cos 10^\circ}$$

۲۱۶ توجه کنید که $\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos \hat{A} \cos \hat{B} - \sin \hat{A} \sin \hat{B} = 0$

بنابراین $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$ و در نتیجه $\hat{C} = 90^\circ$. به این ترتیب $\cos \hat{B} = \sin \hat{A}$ و در نتیجه مقدار عبارت مورد نظر برابر است با ۲.

۲۱۷ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{A} + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{A} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{B} + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{B} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

از طرف دیگر،

$$\cos \hat{C} = \cos(\pi - (\hat{A} + \hat{B})) = -\cos(\hat{A} + \hat{B}) = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B}$$

بنابراین $\cos \hat{C} = -\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2} - 3}{15} \Rightarrow 15 \cos \hat{C} = 8\sqrt{2} - 3$

۲۱۸ توجه کنید که

$$\sin a + \cos b = \frac{2}{3} \Rightarrow (\sin a + \cos b)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 a + \cos^2 b + 2 \sin a \cos b = \frac{4}{9} \quad (1)$$

همین‌طور،

$$\cos a + \sin b = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow (\cos a + \sin b)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\cos^2 a + \sin^2 b + 2 \cos a \sin b = \frac{5}{9} \quad (2)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$(\sin^2 a + \cos^2 a) + (\sin^2 b + \cos^2 b) + 2(\sin a \cos b + \cos a \sin b) = 1$$

بنابراین $\sin(a+b) = -\frac{1}{3}$ پس $1 + 1 + 2 \sin(a+b) = 1$

۲۱۹ توجه کنید که

$$\sin \alpha + \sin \beta = -\sin \gamma, \quad \cos \alpha + \cos \beta = -\cos \gamma$$

اکنون دو طرف هر تساوی را به توان دو می‌رسانیم

$$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = \sin^2 \gamma, \quad (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = \cos^2 \gamma$$

با جمع این دو تساوی معلوم می‌شود

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta)$$

بنابراین $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{3}$ در نتیجه $2 + 2 \cos(\alpha - \beta) = 1$

۲۲۰ توجه کنید که

$$\sin a - \cos a = 4 \sin b \sin(a+b) + 4 \cos b \cos(a+b)$$

$$= 4(\cos((a+b)-b)) = 4 \cos a$$

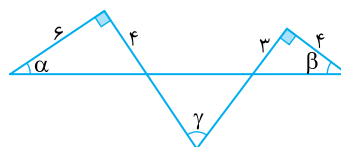
بنابراین $\tan a = 5$ در نتیجه $\sin a = 5 \cos a$

۲۲۱ با توجه به شکل معلوم می‌شود که $\gamma = \alpha + \beta$ در نتیجه

$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{16+36}} = \frac{4}{\sqrt{52}} \quad \text{توجه کنید که } \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$$

بنابراین $\cos \beta = \frac{4}{5}$ و $\sin \beta = \frac{3}{5}$ ، $\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{52}}$

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{\sqrt{52}} \times \frac{4}{5} + \frac{6}{\sqrt{52}} \times \frac{3}{5} = \frac{34}{5\sqrt{52}}$$



۲۲۹ ۳ توجه کنید که همواره

$$\frac{1-\cos 2a}{\sin 2a} = \frac{1+(\sin^2 a - 1)}{2 \sin a \cos a} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر $\tan 2^\circ$ است.

۲۳۰ ۳ توجه کنید که $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ پس $\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8}$ در نتیجه

$$\sin^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos(2 \times \frac{\pi}{8}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۳۱ ۳ ابتدا توجه کنید که $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ در نتیجه اگر $x = \frac{5\pi}{16}$

$$\cos(2 \times \frac{5\pi}{16}) = 1 - 2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{8} = 1 - 2 \sin^2 \frac{5\pi}{16}$$

آن‌گاه

$$2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1$$

۲۳۲ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 3 \cos^2 105^\circ + \sin^2 105^\circ &= 3 \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ \\ &= 2 \sin^2 15^\circ + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 2 \sin^2 15^\circ + 1 \\ &= 1 - \cos(2 \times 15^\circ) + 1 = 2 - \cos 30^\circ = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

۲۳۳ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin \alpha$ مقداری منفی است. پس

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (غ.ق.غ)} \end{aligned}$$

۲۳۴ ۲ توجه کنید که

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos a = \frac{4}{5} \quad (\text{a حاده است})$$

بنابراین

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 2 \left(\frac{16}{25}\right) - 1 = \frac{7}{25}$$

در نتیجه $\sin 2a + \cos 2a = \frac{31}{25}$

۲۳۵ ۲ توجه کنید که

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$

به این ترتیب

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

بنابراین $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{7}$

۲۳۶ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{10}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \left(\frac{9}{10}\right) - 1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

۲۳۷ ۱ توجه کنید که

$$3 \sin x - 4 \cos x = 0 \Rightarrow 3 \sin x = 4 \cos x \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = -\frac{7}{25}$$

بنابراین.

۲۳۸ ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 x \sin x - 4 \sin^3 x \cos x &= 4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 2(2 \sin x \cos x)(\cos 2x) = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x \end{aligned}$$

۲۳۹ ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x &= \sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4x\right) = \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

۲۴۰ ۴ توجه کنید که $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$ بنابراین

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1) &= \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۲۴۱ ۲ ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$A = \frac{1}{4} \sin \left(\frac{4\pi}{24}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

بنابراین به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ x به دست می‌آید

۲۴۲ ۴ توجه کنید که

$$\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) \sin 15^\circ = \cos 15^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

۲۴۳ ۱ توجه کنید که $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \cos \frac{\pi}{8}$ بنابراین

$$(\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2})$$

$$\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

۲۴۴ ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \tan 75^\circ + \cot 75^\circ &= \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} + \frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} \\ &= \frac{1}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} = \frac{2}{2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ} \\ &= \frac{2}{\sin 150^\circ} = \frac{2}{\sin(180^\circ - 30^\circ)} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4 \end{aligned}$$

۲۴۵ ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ} - \frac{\cos 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ} &= \frac{\sin^2 22/5^\circ - \cos^2 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ \cos 22/5^\circ} \\ &= \frac{-\cos(2 \times 22/5^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 22/5^\circ)} = \frac{-\cos 45^\circ}{\frac{1}{2} \sin 45^\circ} = -2 \end{aligned}$$

۲۴۶ ۱ توجه کنید که

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha, \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{2 \cot 2\alpha}{2} = \cos 2\alpha$$